Universidad Metropolitana
Dpto. de Matemáticas Para Ingeniería
Cálculo I (FBMI01)
Profesora Aida Montezuma
Revisión: Profesora Ana María Rodríguez

Semestre 08- 09A

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES

DERIVADAS

DERIVADA EN UN PUNTO

Sea *f* una función real de variable real definida en un intervalo abierto que contenga a *c*, la **derivada** de *f* en *c* se denota por $f\,'(c)$ y se define como:

$$f\,'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

siempre que el límite exista y sea finito. Si el límite existe y es finito decimos que *f* es derivable (derivable) en *c*.

Si hacemos $h = x - c$ la definición se puede escribir así:

$$f\,'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Ejemplo:

Dada la función real de variable real definida por $f(x) = 3x^2 - 1$, se tiene que

$$f\,'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3(4+h)^2 - 1 - 47}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{24h + 3h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \left(24 + 3h\right) = 24$$

o también

$$f\,'(4) = \lim_{x \to 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{3x^2 - 1 - 47}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{3x^2 - 48}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{3(x-4)(x+4)}{x - 4} = \lim_{x \to 4} 3(x+4) = 24$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA

$f\,'(c)$ es la pendiente de la recta tangente de la gráfica de la función *f* en el punto de coordenadas $\left(c\,,\, f(c)\right)$. Luego, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f* en el punto de coordenadas $\left(c\,,\, f(c)\right)$ es:

$$y - c = f\,'(c)\left(x - c\right)$$

Ejemplo:

Dada la función real de variable real definida por $f(x)=3x^2-1$, se tiene que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto $(4\,,47)$ es:

$$y-47=f\,'(4)(x-4)$$

Es decir,

$$y-47=24(x-4) \quad \text{o} \quad y-24x+49=0$$

FUNCIÓN DERIVADA

Dada la función real de variable real *f* , la **derivada** de la función *f* con respecto a la variable *x* es la función *f ´* que le asigna su derivada a cada elemento *x* del dominio de *f* para el cual $f\,'(x)$ existe.

Ejemplo:

Dada la función real de variable real definida por $f(x)=3x^2-1$, se tiene que

$$f\,'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)^2-1-\left(3x^2-1\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(6x+3h)}{h}=\lim_{h\to 0}(6x+3h)=6x$$

Luego, la derivada de la función *f* es la función *f ´* definida por $f\,'(x)=6x$, es decir,

$$\begin{aligned} &f\,':\mathrm{R}\to\mathrm{R}\\ &x\to f\,'(x)=6x\end{aligned}$$

Otras notaciones

Además de $f\,'(x)$ las otras notaciones para la derivada son:

$$y\,'(x)\,,\ \frac{dy}{dx}\,,\ \frac{df}{dx}\,,\ \frac{d}{dx}\big(f(x)\big)$$

Teorema:

Si una función real de variable real *f* es derivable en *c*, entonces es continua en *c*.

Derivada en un intervalo

Se dice que una función *f* es derivable en un intervalo abierto si tiene derivada en cada punto del intervalo.

Se dice que una función *f* es derivable en un intervalo de la forma $[a, b)$ o de la forma $[a, +\infty)$ si es derivable en el intervalo (a, b) o $(a, +\infty)$ y si el límite

$$f_+{}'(a) \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad \text{(derivada por la derecha)}$$

existe y es finito.

Se dice que una función *f* es derivable en un intervalo de la forma $(a, b]$ o de la forma $(-\infty, b]$ si es derivable en el intervalo (a, b) o $(-\infty, b)$ y si el límite

$$f_-{}'(b) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(b+h)-f(b)}{h} \qquad \text{(derivada por la izquierda)}$$

existe y es finito.

Se dice que una función *f* es derivable en un intervalo de la forma $[a, b]$ si es derivable en el intervalo (a, b) y si los límites

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{y} \quad \lim_{h\to 0^-} \frac{f(b+h)-f(b)}{h}$$

existen y son finitos.

REGLAS DE DERIVACIÓN

Sean *f* y *g* funciones derivables en *x* y *c* una constante. Entonces las funciones cf, $f+g$, $f-g$, fg y $\frac{f}{g}$ con $g(x) \neq 0$, son derivables en *x*, y se verifica:

$$(cf)'(x) = cf\,'(x)$$
$$(f+g)'(x) = f\,'(x) + g\,'(x)$$
$$(f-g)'(x) = f\,'(x) - g\,'(x)$$
$$(fg)'(x) = f(x)g\,'(x) + f\,'(x)g(x)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f\,'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}, \quad g(x) \neq 0$$

DERIVADAS DE ALGUNAS FUNCIONES ELEMENTALES

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES POLINÓMICAS

CASOS PARTICULARES

Derivada de la función constante:

Dada la función real de variable real definida por $f(x) = b$, donde *b* es un número real se tiene que:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{b-b}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0 .$$

También se escribe:

$$\frac{d(b)}{dx} = 0 \text{, para todo número real } x.$$

Ejemplo

Sea *f* la función real de variable real definida por $f(x) = -2$. Entonces $f'(x) = 0$ para todo número real *x*. Esto significa que la recta tangente en cualquier punto de la gráfica de *f* tiene pendiente cero, es decir, la recta tangente en cualquier punto de la gráfica de *f* es paralela al eje *x*.

Derivada de la función identidad

Dada la función real de variable real definida por $f(x) = x$ se tiene que:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1 .$$

También se escribe:

$$\frac{d(x)}{dx} = 1 \text{, para todo número real } x.$$

Esto significa que la recta tangente en cualquier punto de la gráfica de *f* es la recta $y = x$, es decir, es la misma recta.

Derivada de la funciones potencias

> Dada la función real de variable real definida por $f(x) = x^n$ donde *n* es un número entero positivo se tiene que $f'(x) = n\,x^{n-1}$, para todo número real *x*.

Ejemplo:

Dada la función polinómica real definida por $f(x) = x^2$ se tiene que $f'(x) = 2x$. Verifiquémoslo por definición:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = 2x$$

En particular, $f'(3) = 6$, luego, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(3, 9)$ es:

$$y - 9 = f'(3)(x-3)$$

Es decir,

$$y - 9 = 6(x-3) \quad \text{o} \quad y - 6x + 9 = 0$$

En general, aplicando los teoremas de derivada de una constante, derivada de una suma, derivada de una constante por una función y derivada de una potencia, tenemos que:

> Dada la función real de variable real definida por $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales se tiene que:
>
> $$f'(x) = a_1 + 2a_2 x \ldots + n a_n x^{n-1}$$, para todo número real *x*.

Ejemplos:

1) Sea *f* la función real de variable real definida por $f(x) = x^2 - 2x - 3$, se tiene que:

$$f'(x) = 2x - 2$$

En particular, $f'(5) = 8$, $f'(-2) = -6$, $f'(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} - 2$, etc.

2) Sea *f* la función real de variable real definida por $f(x) = -x^2 + 2x - 3$, se tiene que

$$f'(x) = -2x + 2$$

En particular, $f'(0) = 2$, $f'(-1) = 4$, $f'(1) = 0$, etc.

3) Sea *f* la función real de variable real definida por $f(x) = 3x^5 - \frac{x^3}{4} - \sqrt{7}$, se tiene que:

$$f'(x) = 15x^4 - \frac{3x^2}{4}$$

En particular, $f'(0) = 0$, $f'(1) = \frac{57}{4}$, $f'\left(\sqrt{2}\right) = \frac{117}{2}$, etc.

DERIVADAS DE FUNCIONES RACIONALES

CASO PARTICULAR

Derivada de la función recíproca

Dada la función real de variable real definida por $f(x) = \frac{1}{x}$, con $x \neq 0$ se tiene que:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-h}{(x+h)x}}{h} = \lim_{h\to 0} \left(-\frac{1}{x(x+h)} \right) = -\frac{1}{x^2}$$

En general, aplicando el teorema de derivada de un cociente, tenemos que:

Dada la función real de variable real definida por $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios con $q(x) \neq 0$ se tiene que:

$$f'(x) = \frac{q(x)\, p'(x) - p(x)\, q'(x)}{\left(q(x)\right)^2}$$, para todo número real *x* con $q(x) \neq 0$.

Ejemplos:

1) Sea *f* la función real de variable real definida por $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{3x+12}$, se tiene que:

$$f'(x)=\frac{(3x+12)(2x-5)-(x^2-5x+6)(3)}{(3x+12)^2}=\frac{3x^2+24x-78}{(3x+12)^2}\text{, para } x\neq -4$$

2) Sea *f* la función real de variable real definida por $f(x)=x^n$, con $x\neq 0$ y *n* un número entero negativo. Entonces $f(x)=x^n=\dfrac{1}{x^{-n}}$ con $-n\in Z^+$, luego

$$f'(x)=\frac{x^{-n}\cdot 0-1\cdot(-n)x^{-n-1}}{\left(x^{-n}\right)^2}=nx^{n-1}$$

Hemos demostrado:

Derivada de potencias enteras negativas

Dada la función real de variable real definida por $f(x)=x^n$ donde *n* es un número entero negativo, se tiene que $f'(x)=n\,x^{n-1}$, para todo número real $x\neq 0$.

Ejemplos:

1) Sea *f* la función real de variable real definida por $f(x)=x^{-4}$, con $x\neq 0$, se tiene que:

$$f'(x)=-4\,x^{-5}\text{, para } x\neq 0$$

1) Sea *f* la función real de variable real definida por $f(x)=\dfrac{1}{x^8}$, con $x\neq 0$,

Observa que $f(x)=\dfrac{1}{x^8}=x^{-8}$, luego

$$f'(x)=-8\,x^{-9}=-\frac{8}{x^9}\text{, para } x\neq 0$$

DERIVADA DE LA FUNCIÓN RAÍZ CUADRADA

Dada la función real de variable real definida por $f(x)=\sqrt{x}$ se tiene que:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}==\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}},$$

para todo número real $x>0$.

DERIVADA DE x^n PARA TODO NÚMERO REAL NO NULO *n*.

En general se puede demostrar que:

Dada la función real de variable real definida por $f(x)=x^n$ donde *n* es un número real no nulo tiene que:

$$f'(x)=n\,x^{n-1}$$

Para los valores de *x* para los cuales la función esté definida.

Ejemplo:

Sea *f* la función real de variable real definida por $f(x)=\sqrt[3]{x}$, se tiene que:

$$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$, para todo número real $x\neq 0$.

En particular: $f'(8)=\frac{1}{3}(8)^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{12}$

DERIVADA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Derivada de la función seno

Dada la función real de variable real definida por $f(x) = \text{sen}\,(x)$. Se tiene que

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}\,(x+h) - \text{sen}\,x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}\,x \cdot \cos h + \text{sen} h \cdot \cos x - \text{sen}\,x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\text{sen} x \cdot \frac{(\cos h - 1)}{h} + \cos x \cdot \frac{senh}{h}\right] = \cos x\,.$$

También se escribe:

$$\frac{d\,(\text{sen} x)}{dx} = \cos x$$, para todo número real *x*.

Derivada de la función coseno

Dada la función real de variable real definida por $f(x) = cos\,(x)$. Se tiene que

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cdot \cos h - \text{sen} h \cdot senx - \cos x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\cos x \cdot \frac{(\cos h - 1)}{h} - senx \cdot \frac{senh}{h}\right] = -\text{sen} x\,.$$

También se escribe:

$$\frac{d\,(\cos x)}{dx} = -\,\text{sen} x$$, para todo número real *x*.

Derivada de la función tangente

Dada la función real de variable real definida por $f(x) = \tan(x)$. Se tiene que

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\text{senx}}{\text{cosx}}\right) = \frac{\cos x \cdot \cos x - \text{sen} x \cdot (-\text{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x\,.$$

También se escribe:

$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$, para todo número real *x* diferente de $\frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathrm{Z}$.

Derivada de la función secante

Dada la función real de variable real definida por $f(x)=\sec(x)$. Se tiene que

$$f'(x)=\frac{d}{dx}(\sec x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}\right)=\frac{-(-\text{sen } x)}{\cos^2 x}=\frac{\text{sen } x}{\cos^2 x}=\sec x\cdot\tan x$$. Es decir,

$\frac{d}{dx}(\sec x)=\sec x\cdot\tan x$, para todo número real x diferente de $\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad k\in \mathbb{Z}$.

Derivada de la función cosecante

Dada la función real de variable real definida por $f(x)=\csc(x)$. Se tiene que

$$f'(x)=\frac{d}{dx}(\csc x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\text{sen } x}\right)=\frac{-(\cos x)}{\text{sen}^2 x}=-\csc x\cdot\text{cotan } x.$$

También se escribe:

$\frac{d}{dx}(\csc x)=-\csc x\cdot\text{cotan } x$, para todo número real x diferente de $k\pi,\quad k\in \mathbb{Z}$.

Derivada de la función cotangente

Dada la función real de variable real definida por $f(x)=\text{cotan}(x)$. Se tiene que

$$f'(x)=\frac{d}{dx}(\text{cotan } x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\text{sen } x}\right)=\frac{\text{sen } x\cdot(-\text{sen } x)-\cos x\cdot\cos x}{\text{sen}^2 x}=-\frac{1}{\text{sen}^2 x}=-\csc^2 x.$$

También se escribe:

$\frac{d}{dx}(\text{cotan } x)=-\csc^2 x$, para todo número real x diferente de $k\pi,\quad k\in \mathbb{Z}$.

DERIVADA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL DE BASE *a*

Dada la función real de variable real definida por $f(x) = a^x$ con $a > 0$ y $a \neq 1$ se tiene que: $f\,'(x) = a^x \ln a$, para todo número real *x*.

Ejemplos:

1) Sea *f* la función real de variable real definida por $f(x) = 2^x$. Entonces

$$f\,'(x) = 2^x \ln 2$$

2) Sea *f* la función real de variable real definida por $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Entonces

$$f\,'(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x \ln 2$$

3) Sea *f* la función real de variable real definida por $f(x) = \mathrm{e}^x$. Entonces

$$f\,'(x) = e^x \ln e = e^x$$

Demostrémoslo por definición:

$$f\,'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{\left(e^h - 1\right)}{h}$$

Observa que:

$$f\,'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

Luego,

$$f\,'(x) = e^x \lim_{h\to 0} \frac{\left(e^h - 1\right)}{h} = e^x \; f\,'(0)$$

Sabemos que las gráficas de todas las funciones de la forma $y = a^x$ pasan por el punto $(0\,,1)$ y además la pendiente de la recta tangente a cada una de las gráficas en ese punto es $f\,'(0)$. Como definimos el número e como el número real en el cual la pendiente de la recta tangente a $y = a^x$ en el punto $(0\,,1)$ es uno, resulta que:

$$f\,'(x) = e^x \lim_{h\to 0} \frac{\left(e^h - 1\right)}{h} = e^x \; f\,'(0) = e^x \cdot 1 = e^x$$

DERIVADA DE LA FUNCIÓN INVERSA

Sea *f* una función derivable estrictamente creciente o decreciente en un intervalo I. Si $f'(x) \neq 0$ entonces f^{-1} es derivable en el punto correspondiente $y = f(x)$ del rango de *f* y

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Ejemplo:

La función real de variable real definida por $f(x) = 2x^3 - 8x + 5$ tiene inversa en el intervalo $[-1,1]$. Hallemos $\left(f^{-1}\right)'(5)$.

Sabemos que

$$\left(f^{-1}\right)'(5) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

donde x_0 es el punto del intervalo $[-1,1]$ cuya imagen es 5.

Determinemos primero a x_0. Para ello hallemos primero todos los valores del dominio cuya imagen es 5, es decir, todos los valores que satisfacen $f(x) = 5$.

$$f(x) = 5 \Rightarrow 2x^3 - 8x + 5 = 5 \Rightarrow 2x^3 - 8x = 0 \Rightarrow 2x(x-2)(x+2) = 0$$

Las soluciones de la ecuación anterior son: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ y $x_3 = -2$.

Luego, $x_0 = 0$, ya que esta es la raíz de la ecuación que pertenece al intervalo dado.

Ahora hallemos $f'(x)$.

$$f'(x) = 6x^2 - 8$$

En consecuencia

$$f'(0) = -8$$

Por lo tanto,

$$\left(f^{-1}\right)'(5) = \frac{1}{f'(0)} = -\frac{1}{8}$$

DERIVADA DE LA FUNCIÓN LOGARITMO DE BASE *a*

Dada la función logaritmo de base *a* definida por $f(x) = \log_a x$ para $x > 0$ se tiene que *f* es la inversa de $g(x) = a^x$, entonces

$$f'(y) = \frac{1}{g'(x)} = \frac{1}{a^x \ln a} = \frac{1}{y \ln a}$$

Luego:

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$$

También se escribe:

$$\frac{d}{dx}\left(\log_a x\right) = \frac{1}{x \ln a}, \text{ para todo número real } x > 0.$$

Ejemplos:

1) Sea *f* la función real de variable real definida por $f(x) = \log_2 x$. Entonces

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln 2}$$

2) Sea *f* la función real de variable real definida por $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$. Entonces

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln\left(\frac{1}{2}\right)} = -\frac{1}{x \ln 2}$$

3) Sea *f* la función real de variable real definida por $f(x) = \ln x$. Entonces

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln e} = \frac{1}{x}$$

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Derivada de la función arco seno

Dada la función arco seno de *x* denotada por $f(x) = \arcsin(x)$ para $x \in (-1,1)$ se tiene que *f* es la inversa de $g(x) = \operatorname{sen} x$,

$$f'(y) = \frac{1}{g'(x)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Luego:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

También se escribe:

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsen} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$, para todo número real $x \in (-1,1)$.

Derivada de la función arco tangente

Dada la función arco tangente de *x* denotada por $f(x) = \arctan(x)$ para $x \in \mathrm{R}$ se tiene que

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

También se escribe:

$$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$$, para todo número real *x*.

Derivada de la función arco coseno

Dada la función arco coseno de *x* denotada por $f(x) = \arccos(x)$ para $x \in (-1,1)$ se tiene que

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

También se escribe:

$$\frac{d}{dx}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$, para todo número real $x \in (-1,1)$.

Derivada de la función arco secante

Dada la función arco secante de *x* denotada por $f(x) = \operatorname{arcsec}(x)$ con $|x| > 1$ se tiene que

$$f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

También se escribe

$$\frac{d}{dx}\left(\operatorname{arcsec} x\right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$, para todo número real *x* con $|x| > 1$.

Derivada de la función arco cosecante

Dada la función arco cosecante de *x* denotada por $f(x) = \operatorname{arccsc}(x)$ con $|x| > 1$ se tiene que

$$f'(x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

También se escribe

$$\frac{d}{dx}\left(\operatorname{arccsc} x\right) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$, para todo número real *x* con $|x| > 1$.

Derivada de la función arco cotangente

Dada la función arco cotangente de *x* denotada por $f(x) = \operatorname{arccotan}(x)$ para $x \in \mathrm{R}$ se tiene que

$$f'(x) = -\frac{1}{1 + x^2}$$

También se escribe:

$$\frac{d}{dx}\left(\operatorname{arccotan} x\right) = -\frac{1}{1 + x^2}$$, para todo número real *x*.

DERIVADA DE LA FUNCIÓN COMPUESTA

Sea *g* derivable en *x* y sea *f* derivable en $g(x)$. Entonces la función compuesta $f \circ g$ es derivable en *x*, y se tiene que:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\,g'(x)$$

Ejemplos:

1) Sea *h* la función real de variable real definida por $h(x) = \left(x^4 - 3x\right)^8$. Entonces

$$h'(x) = 8\left(x^4 - 3x\right)^7\left(4x^3 - 3\right)$$

2) Sea *f* la función real de variable real definida por $f(x) = \cos^2\left(\operatorname{sen}\left(x^2 + \sqrt{2}\right)\right)$. Entonces

$$f'(x) = 2\cos\left(\operatorname{sen}\left(x^2 + \sqrt{2}\right)\right)\left(-\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}\left(x^2 + \sqrt{2}\right)\right)\right)\cos\left(x^2 + \sqrt{2}\right)2x$$
$$f'(x) = -4x\cos\left(\operatorname{sen}\left(x^2 + \sqrt{2}\right)\right)\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}\left(x^2 + \sqrt{2}\right)\right)\cos\left(x^2 + \sqrt{2}\right)$$

3) Sea *g* la función real de variable real definida por $g(x) = \sqrt[3]{4x^7 - 3x^2 + \sqrt{x^2 + 1}}$. Entonces

$$g'(x) = \frac{1}{3}\left(4x^7 - 3x^2 + \sqrt{x^2 + 1}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(28x^6 - 6x + \frac{1}{2}\left(x^2 + 1\right)^{-\frac{1}{2}}2x\right)$$

4) Sea *w* la función real de variable real definida por $w(x) = \ln\left(\operatorname{sen}^2\left(x^4 + 8\right)\right)$. Entonces

$$w'(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\left(x^4 + 8\right)}\,2\operatorname{sen}\left(x^4 + 8\right)\cos\left(x^4 + 8\right)4x^3$$
$$w'(x) = \frac{8x^3}{\operatorname{sen}^2\left(x^4 + 8\right)}\operatorname{sen}\left(x^4 + 8\right)\cos\left(x^4 + 8\right)$$

5) Sea *t* la función real de variable real definida por $t(x) = \operatorname{arcotan}\left(x^6 - x^3 - \sqrt{2}\right)$. Entonces

$$t'(x) = \frac{1}{1 + \left(x^6 - x^3 - \sqrt{2}\right)^2}\left(6x^5 - 3x^2\right)$$
$$t'(x) = \frac{6x^5 - 3x^2}{1 + \left(x^6 - x^3 - \sqrt{2}\right)^2}$$